Date. No.

15/5/19

Δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ $\rightarrow$ $(R, +)$ αβελιανή ομάδα
$\rightarrow$ $(ab)c = a(bc)$
$\rightarrow$ $a(b+c) = ab + ac$
$(a+b)c = ac + bc$

Αντιμεταθετικός δακτύλιος $ab = ba$

Δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο $1 \in R$: $1a = a \cdot 1 = a$

u μονάδα αν u έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο
$u \cdot u' = 1 = u' \cdot u$

R δακτύλιος διαίρεσης $\Rightarrow$ κάθε στοιχείο μη μηδενικό έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (είναι μονάδα)

Δακτύλιος διαίρεσης $\xrightarrow{\text{αντιμεταθετικός}}$ σώμα
$\xrightarrow{\text{μη-αντιμεταθετικός}}$ στρεβλό σώμα

$a \neq 0$, $b \neq 0$ $a \cdot b = 0$
διαιρέτες του μηδενός

Ορισμός: Ακέραια περιοχή λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο $(1 \neq 0)$ χωρίς διαιρέτες του μηδενός

Date. No.

Παραδείγματα: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Θεώρημα: κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.

Αποδ: F σώμα $\Rightarrow$ αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης $\Rightarrow$ F αντιμεταθετικός
F δακτύλιος διαίρεσης $\Rightarrow$ F έχει μοναδιαίο στοιχείο

Έστω $a \neq 0$, $b \neq 0$ και $ab = 0$

$ab = 0$ $a \neq 0$ άρα a: αντιστρέψιμο (μονάδα)
$a' \cdot a = 1$
$a'(ab) = a' \cdot 0 \Rightarrow (a'a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0$ άτοπο

Άρα δεν έχει διαιρέτες του μηδενός

Ορισμός: Αν για κάποιο δακτύλιο υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε:
$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\text{-φορές}}$ για κάθε $a \in R$ τότε ο μικρότερος τέτοιος φυσικός ονομάζεται χαρακτηριστική του δακτυλίου. Αν δεν υπάρχει τέτοιος φυσικός αριθμός τότε λέμε ότι ο δακτύλιος έχει χαρακτηριστική μηδέν.

Συμβολίζεται $\text{char}(R)$

Date. No.

Παραδείγματα: char($\mathbb{Z}_2$) = 2

char($\mathbb{Z}_{12}$) = 12

char($\mathbb{Z}$) = 0

char($\mathbb{R}$) = 0

char ~~(S_n)~~ = S_n: όχι δακτύλιος

Ευθύ γινόμενο δακτυλίων

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ δακτύλιοι

$R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_i \in R_i\}$

$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (r_1', r_2', \ldots, r_n') = (r_1 + r_1', r_2 + r_2', \ldots, r_n + r_n')$

$(r_1, r_2, \ldots, r_n) \cdot (r_1', r_2', \ldots, r_n') = (r_1 r_1', r_2 r_2', \ldots, r_n r_n')$

(π.χ) char($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) = 2

char($\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3$) = ΕΚΠ(7, 3) = 21

char($\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$) = ΕΚΠ(6, 9, 12) = 36

char($\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$) = 0

Ορισμός: Έστω R και R' δακτύλιοι. Μία απεικόνιση $\varphi: R \to R'$ ονομάζεται <u>ομομορφισμός δακτυλίων</u> αν:

$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

Ορισμός: Ένας ομομορφισμός δακτυλίων ονομάζεται <u>μονομορφισμός</u> αν είναι 1-1. Ονομάζεται <u>επιμορφισμός</u> αν είναι επί. Ονομάζεται <u>ισομορφισμός</u> αν είναι 1-1 και επί

Date. No.

Ορισμός: Δύο δακτύλιοι R και R' ονομάζονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: R \to R'$

R ισόμορφος με τον R'

$R \simeq R'$

Παρατήρηση: Αν $\varphi: R \to R'$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε $\varphi: R \to R'$ είναι ομομορφισμός των ομάδων, $(R,+)$ και $(R',+)$

Πρόταση: Έστω φ ομομορφισμός δακτυλίων τότε:

$\varphi(0) = 0'$

$\varphi(-a) = -\varphi(a)$

Πρόταση: Έστω φ ομομορφισμός δακτυλίων R, R' και R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο τότε: $\varphi(1)$ είναι ταυτοδύναμο στοιχείο του R'

$\boxed{\text{a ταυτοδύναμο αν } a^2 = a}$

Αποδ: $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1) = \varphi^2(1) = \varphi(1)$

Πρόταση: Έστω φ ομομορφισμός δακτυλίων φ είναι μονομορφισμός αν $\ker\varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\} = \{0\}$

Date. No.

Άσκηση: Δείξτε ότι οι δακτύλιοι $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ισόμορφοι

Απόδ: Έστω φ ισομορφισμός από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{R}$

$\varphi(0)=0$

$1 \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi^2(1) = \varphi(1) \Rightarrow \varphi^2(1) - \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(1)(\varphi(1)-1)=0$

$\mathbb{R} \xRightarrow{\text{σώμα}} \mathbb{R}$ ακέραια περιοχή $\Rightarrow \varphi(1)=0$ ή $\varphi(1)-1=0$
$\Rightarrow \varphi(1)=1$

φ ισομορφισμός $\Rightarrow \varphi$ 1-1 $\Rightarrow \ker\varphi = \{0\}$

$\varphi(0)=0$ άρα $\varphi(1)\neq 0$. Άρα $\underline{\varphi(1)=1}$

$\varphi(-1) = -1$

$i^2 = -1 \Rightarrow \varphi(i^2) = \varphi(-1) \Rightarrow \varphi(i\cdot i) = -1 \Rightarrow$

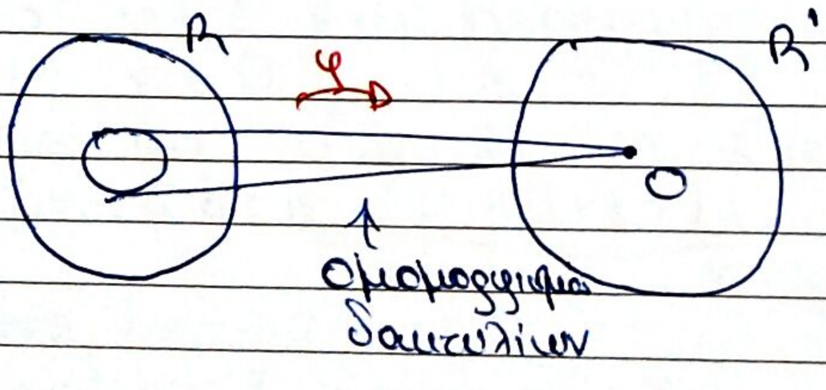
$\Rightarrow \varphi(i)\varphi(i) = -1 \Rightarrow \varphi^2(i) = -1$

$\varphi(i) \in \mathbb{R}$ $\quad -1 = \varphi(i)^2 \geq 0$

ΑΤΟΠΟ

Άρα $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ισόμορφοι

Για το σπίτι: ΝΔΟ οι $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ δεν είναι ισόμορφοι
($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ενώ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)



$\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 0\}$

Date. No.

Πρόταση: Έστω $r \in R$ και $x \in \ker\varphi$ τότε: $rx \in \ker\varphi$

Αποδ: $\varphi(r \cdot x) = \varphi(r) \cdot \varphi(x) = \varphi(r) \cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow rx \in \ker\varphi$

Ορισμός: Ένα υποσύνολο I του δακτυλίου R λέγεται <u>ιδεώδες</u> του R αν:

1) $0 \in I$
2) Αν $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$
3) αν $r \in R$ τότε $rI \subseteq I$ και $Ir \subseteq I$

$I \leq R$ $(I, +, \cdot)$ Δακτύλιος

Παραδείγματα: Το $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

1) $0 = 2 \cdot 0 \in 2\mathbb{Z}$
2) Αν $a, b \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow a = 2\kappa,\ b = 2\lambda \Rightarrow a - b = 2\kappa - 2\lambda =$
$= 2(\kappa - \lambda) \in 2\mathbb{Z}$
3) Αν $r \in \mathbb{Z}$ και $a \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow a = 2\kappa$
$ra = r2\kappa = 2r\kappa \in 2\mathbb{Z}$ Άρα $2\mathbb{Z}$ <u>ιδεώδες</u>

Date. No.

φυλ. 8

(5) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ και βρείτε όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Λύση: $\mathbb{R}$ αβελιανή άρα κάθε υποομάδα της είναι κανονική δηλ. $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad r+\mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2}+\mathbb{Z}=\left\{\frac{1}{2}+n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$$

~~vovovovovovovovovovov~~ $\neq$ δηλ. $0+\mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right) \neq 0+\mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)+\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)=1+\mathbb{Z}=0+\mathbb{Z}$$

$$o\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)=2 \qquad o\left(\frac{5}{7}+\mathbb{Z}\right)=7$$

$$o\left(\frac{1}{3}+\mathbb{Z}\right)=3 \qquad o\left(\sqrt{2}+\mathbb{Z}\right)=\infty$$

Πρόχειρο

Το $r+\mathbb{Z}$ έχει πεπερασμένη τάξη αν και μόνο αν $r\in\mathbb{Q}$

Έστω ότι $o(r+\mathbb{Z})=n<\infty \Rightarrow n(r+\mathbb{Z})=0+\mathbb{Z}$

$$n(r+\mathbb{Z})=\underbrace{(r+\mathbb{Z})+(r+\mathbb{Z})+\dots+(r+\mathbb{Z})}_{n\text{-φορές}}=(r+r+\dots+r)\mathbb{Z}$$

$= nr+\mathbb{Z}=0+\mathbb{Z}$

$nr-0\in\mathbb{Z} \Rightarrow nr=m\in\mathbb{Z} \Rightarrow r=\frac{m}{n}$ $\begin{matrix} \in\mathbb{Z} \\ n\in\mathbb{Z}\end{matrix}$ $\in\mathbb{Q}$

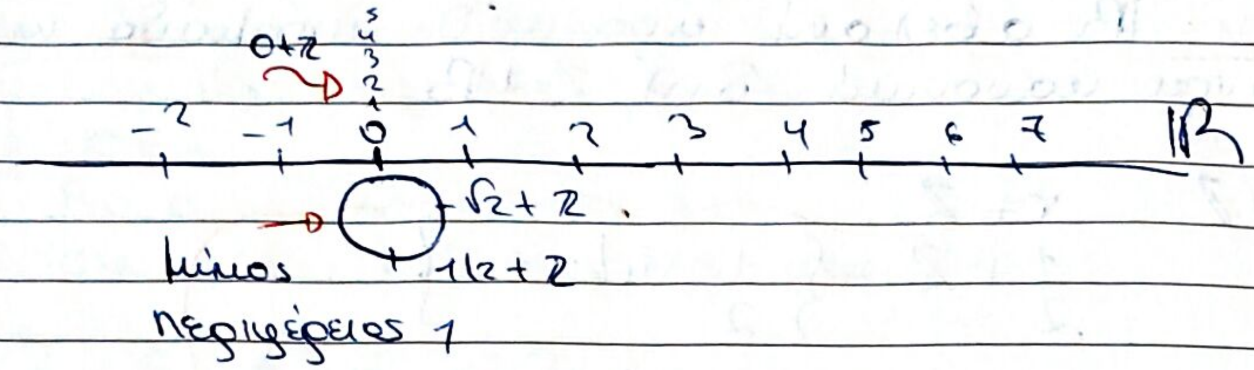
$(\Leftarrow)$ Έστω $r+\mathbb{Z}$ με $r\in\mathbb{Q} \Rightarrow r=\frac{k}{\lambda}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{N}$

Date. No.

$$\lambda(r+\mathbb{Z}) = \underbrace{(r+\mathbb{Z}) + (r+\mathbb{Z}) + \dots + (r+\mathbb{Z})}_{\lambda\text{-φορές}} =$$

$$= \underbrace{(r+r+\dots+r)}_{\lambda \text{ φορές}} + \mathbb{Z} = \lambda r + \mathbb{Z} = k + \mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow o(r+\mathbb{Z}) \mid \lambda < \infty$$



Ασκ: Βρείτε την τάξη του $[5]_{12}+H$ στην $\mathbb{Z}_{12}/H$, όπου $H = \langle [4]_{12} \rangle = \langle [0], [4], [8] \rangle$

Λύση: $1([5]_{12}+H) = [5]_{12}+H \neq [0]+H$

$2([5]_{12}+H) = [10]_{12}+H \neq [0]+H$

$3([5]_{12}+H) = [15]_{12} = [3]+H$

$4([5]_{12}+H) = [20]_{12}+H = [8]_{12}+H = H = [0]+H$

$$\boxed{o([5]_{12}+H) = 4}$$

$$|\mathbb{Z}_{12}/H| = |\mathbb{Z}_{12}| / |H| = 12/3 = 4$$

$\mathbb{Z}_{12}/H$ κυκλική και $[5]+H$ γεννήτορας

Date. No.

Άσκ: Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων $\varphi: \mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$

Λύση: $o([1]_{25}) = 25$

$o(\varphi([1]_{25})) \mid o([1]_{25}) = 25$

$o(\varphi([1]_{25})) \in \{1, 5, 25\}$

$\varphi([1]_{25}) \in \mathbb{Z}_{15} \xrightarrow{Lagrange} o(\varphi([1]_{25})) \mid |\mathbb{Z}_{15}| = 15$

$\Rightarrow o(\varphi([1]_{25})) \in \{1, 3, 5, 15\}$

1η περίπτωση: $o(\varphi(1)) = 1 \Rightarrow \varphi([1]_{25}) = [0]_{25}$

2η -ll- $o(\varphi(1)) = 5$

2α) $\varphi(1) = [3]_{15}$ $\quad \varphi(1) \in \{[3], [6], [9], [12]\}$

$\varphi_1([a]_{25}) = [0]_{15} \ \forall [a] \in \mathbb{Z}_{15}$

$\varphi([a] + [b]) = \varphi([a+b]) = [0] = [0] + [0] =$

$= \varphi([a]) + \varphi([b])$

$\varphi([a]) = [3a]_{15}$

2β) $\varphi(1) = [6]_{15}$ $\quad \varphi([a] + [b]) = \varphi([a+b]) =$

$= [3(a+b)] = [3a] + [3b] = \varphi(a) + \varphi(b)$ άρα ομομορφισμός

2γ) $\varphi([a]) = [9a]$ $\quad \varphi([a]) = [6a]_{15}$

2δ) $\varphi([a]) = [12a]$ $\qquad$ Άρα έχουμε 5 ομομορφισμούς ομάδων

$\varphi([a]_{25}) = [0]_{15}$ $\quad$ ομομορφισμός δακτυλίων

$\varphi([a]_{25}) = [6a]_{15}$

Date. No.

$\varphi([a]+[b]) = \quad = \varphi([a]) + \varphi([b])$

$\varphi([a]\cdot[b]) = \varphi([ab]) = [6ab]_{15} = [36ab]_{15} =$
$= [6a][6b] = \varphi(a)\varphi(b)$

φ : ομομορφισμός

$\varphi: \mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$
$\varphi([a]_{25}) = [a]_{15}$

$\varphi([a]+[b]) = \varphi([a+b]) = [a+b] = [a]+[b] =$
$= \varphi([a]_{25}) + \varphi([b])_{25}$

$\varphi([a][b]) = \varphi([ab]_{25}) = [ab]_{15} = [a]_{15}[b]_{15} =$
$= \varphi([a]_{25})\,\varphi([b]_{25})$

φ : <u>Δεν</u> είναι απεικόνιση

$\varphi([1]) = [1]_{15}$
$\quad\parallel$
$\varphi([26]) = [26]_{15} = [11]_{15}$